Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 20.06.2014.

Euklidske geometrije II, pismeni ispit, (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

Zadatak br. 1

(30%)(a) Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome je tačka M sredina stranice BC a AF visina na BC. Neka je $p(E,D)$ data prava koja je okomita na osnovicu BC, gdje su $E \in AB$, $D \in BC$ i $BE^2 = BN \cdot BA$, $N \in AB$ i $p(M,N) \perp BC$. Dokazati da

$$\frac{P_{\triangle ABM}}{P_{\triangle ABF}} = \frac{BE^2}{BA^2}$$

(70%)(b) Data je prizma čije su baze paralelni i podudarni četverouglovi $\square ABCD$ i $\square A'B'C'D'$. Neka je E tačka na AD takva da je $DE \cong \frac{2}{3}AD$ i produžimo stranicu $D'C'$ do tačke F t.d. $D' - C' - F$ i $C'F \cong \frac{1}{2}D'C'$. Pokazati da se $A'C$ i EF sijeku u nekoj tački i odrediti omjer u kojoj ta tačka djeli $A'C$.

Zadatak br. 2

(30%)(a) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, ugao β i duž $b - c$.

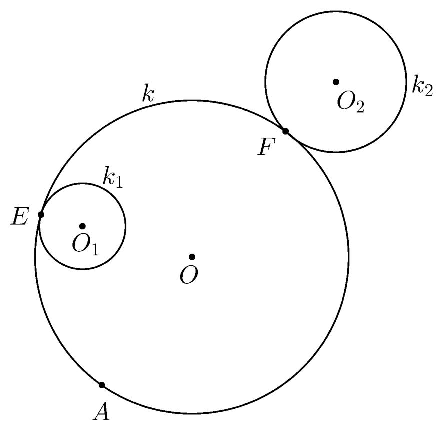
(70%)(b) Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati pravu koja će biti okomita na stranicu BC i koja će dati trougao podjeliti na dva dijela jednakih površina.

U oba zadatka detaljno sprovesti sve četri koraka: analizu, konstrukciju, dokaz i diskusiju.

Zadatak br. 3

(30%)(a) Neka je $\triangle MNR$ pravougli trougao sa pravim uglom u vrhu $\measuredangle RMN$, i neka je MM' visina na hipotenuzu NR. Dokazati da je $MN^2 = NM' \cdot NR$.

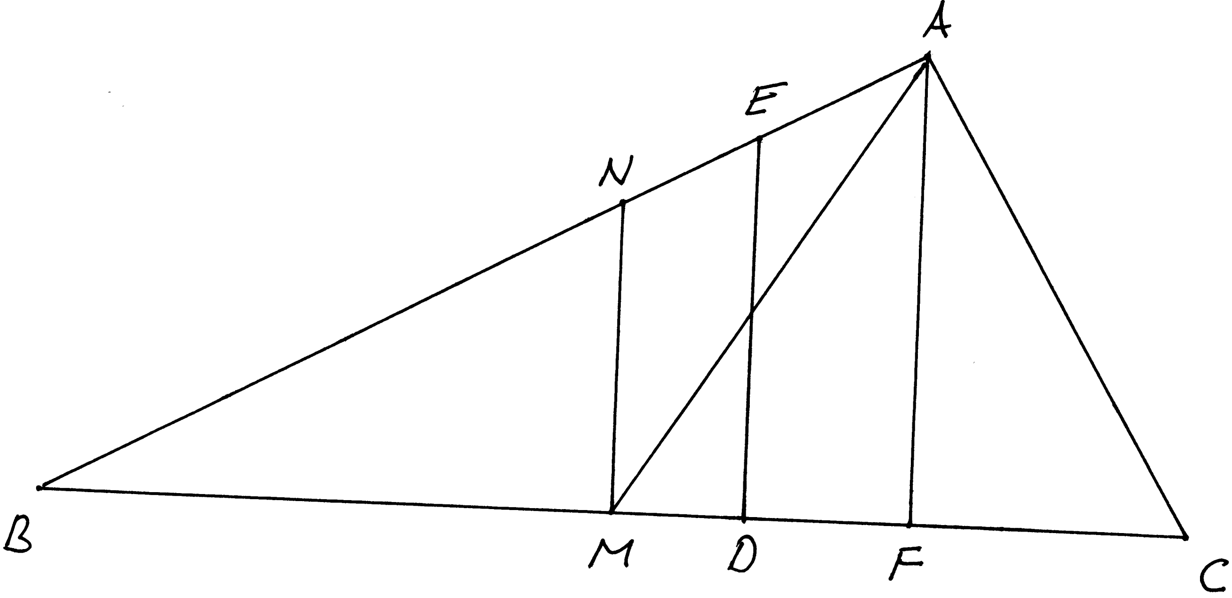
(70%)(b)Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2 kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



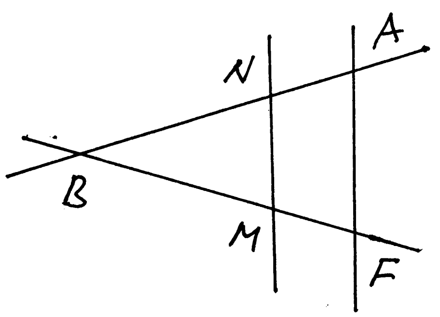
(#) Dat je $\triangle ABC$ u kome je tačka M sredina stranice BC a AF visina na BC. Neka je $p(E,D)$ data prava koja je okomita na osnovicu BC, gdje su $E \in AB$, $D \in BC$ i $BE^2 = BN \cdot BA$, $N \in AB$ i $p(M,N) \perp BC$. Dokazati da

$$\frac{P_{\triangle ABM}}{P_{\triangle ABF}} = \frac{BE^2}{BA^2}$$

Rj.



$$\left.\begin{aligned} P_{\triangle ABM} &= \frac{AF \cdot BM}{2} \\ P_{\triangle ABF} &= \frac{BF \cdot AF}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P_{\triangle ABM}}{P_{\triangle ABF}} = \frac{BM}{BF} \qquad \ldots (1)$$



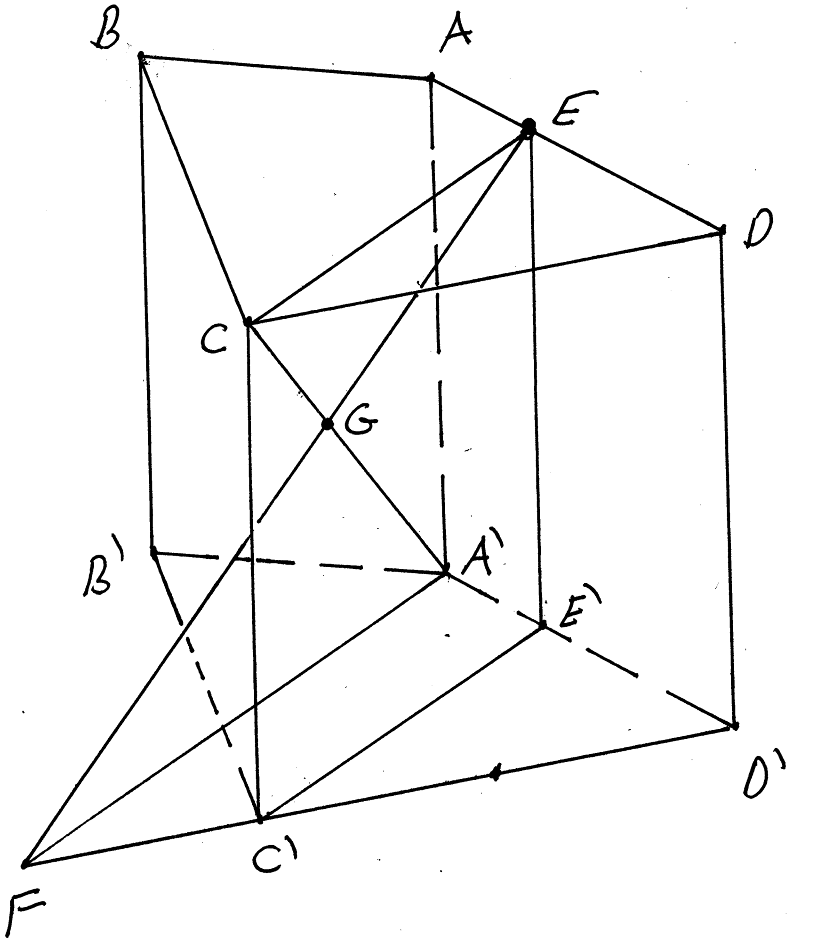
$$\xRightarrow{T.T.} \frac{BM}{BF} = \frac{BN}{BA} \left(= \frac{BN \cdot BA}{BA \cdot BA} = \frac{BN \cdot BA}{BA^2} \right) \qquad \ldots (2)$$

Prema postavci zadatka $BN \cdot BA = BE^2$ pa iz (1) i (2)

$$\frac{P_{\triangle ABM}}{P_{\triangle ABF}} = \frac{BE^2}{BA^2}$$

(#) Data je prizma čije su baze paralelni i podudarni četverouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$. Neka je E tačka na AD takva da $DE=\frac{2}{3}AD$ i produžimo stranicu $D'C'$ do tačke F t.d. $D'-C'-F$ i $C'F=\frac{1}{2}D'C'$. Pokazati da se $A'C$ i EF sijeku u nekoj tački i odrediti omjer u kojoj ta tačka dijeli $A'C$.

Rj.



Neka je $E' \in A'D'$ t.d. $D'E'=\frac{2}{3}A'D'$. Spojimo $A'F$, CE, $C'E'$.

Želimo pokazati sledeće

- $CE \parallel C'E'$ i $CE \cong C'E'$
- $A'F \parallel CE$
- $\frac{CE}{A'F}=\frac{2}{3}$

Kako je $DE=\frac{2}{3}DA$ i $D'E'=\frac{2}{3}A'D' \Rightarrow CE \parallel$ i $\cong$ sa $C'E'$ (zato što su baze prizme podudarne i paralelne).

Primjetimo da je $D'C'=2C'F$ pa vrijedi $\frac{D'C'}{D'F}=\frac{2}{3}=\frac{D'E'}{D'A'} \overset{O.T.T.}{\Longrightarrow}$ $C'E' \parallel A'F$ (a kako je $C'E' \parallel CE$) $\Rightarrow A'F \parallel CE$

Paralelne duži se nalaze u istoj ravni $\Rightarrow EF \cap A'C = \{G\}$.

Posmatrajmo $\triangle D'A'F$ $\frac{D'C'}{D'F}=\frac{C'E'}{A'F}=\frac{2}{3}$ a kako je $C'E' \cong CE \Rightarrow$

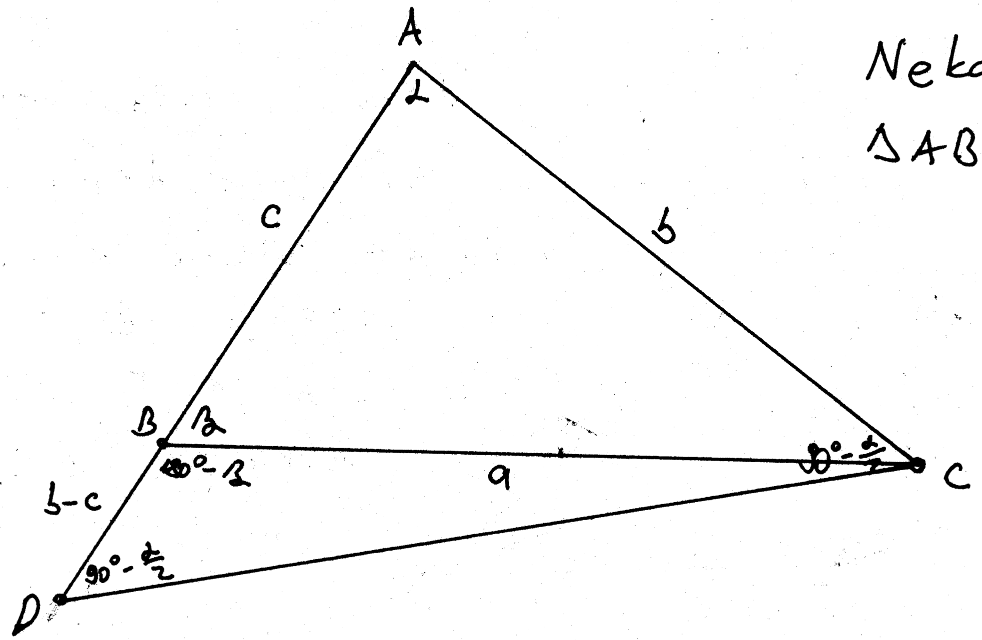
$\Rightarrow \frac{CE}{A'F}=\frac{2}{3}$. Na kraju $CE \parallel A'F \Rightarrow \frac{CG}{GA'}=\frac{CE}{A'F}=\frac{2}{3}$.

Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, ugao β i duž $b-c$.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je dat ΔABC.



Produžimo stranicu AB do tačke D tako da je $A-B-D$ i $AD \cong AC$. Primjetimo da je $\measuredangle DBC = 180^\circ - \beta$, i da je $BD = b - c$. U ΔDCB su date dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati.

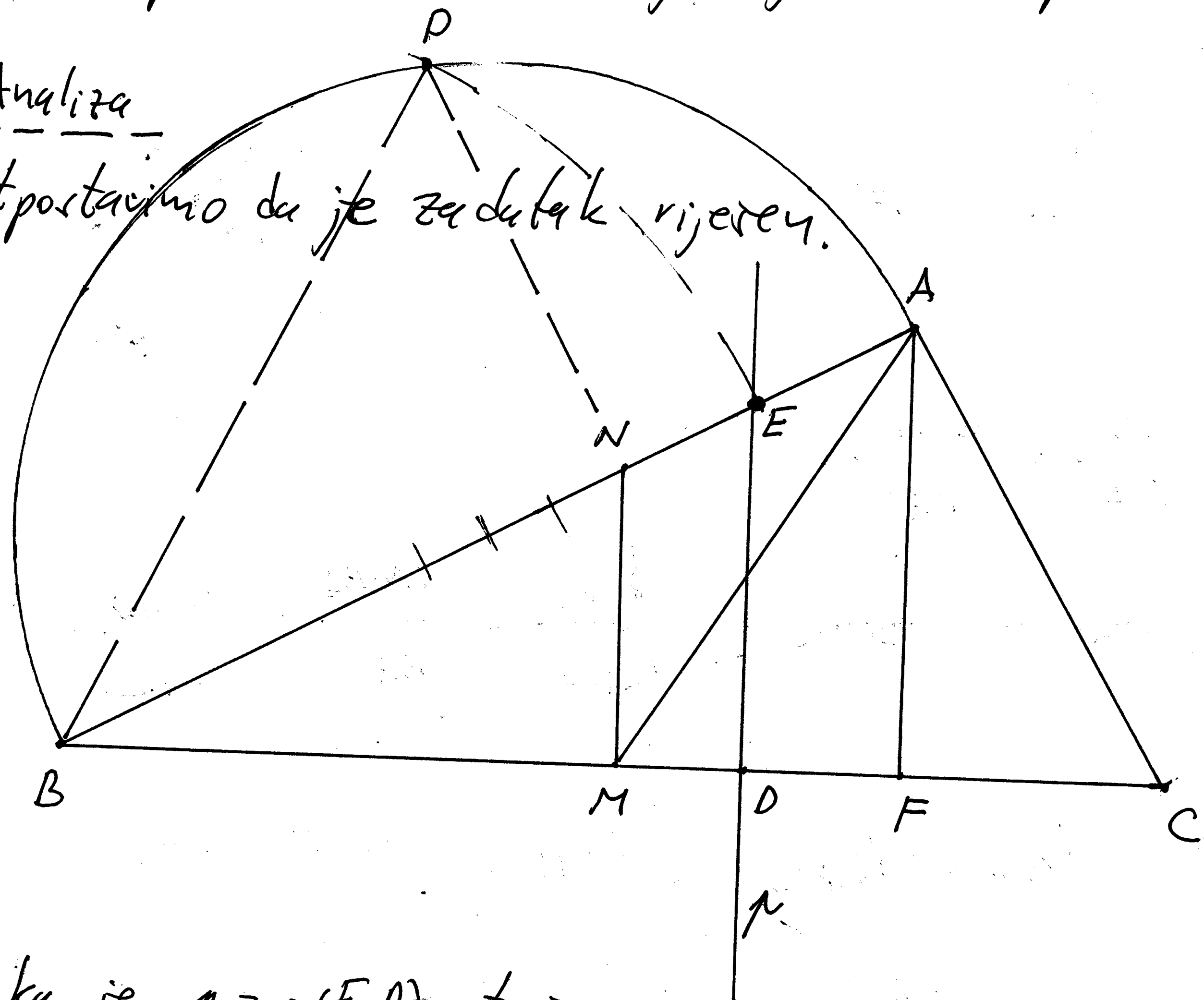
Tačku A možemo dobiti na dva načina (kako?) a time i ΔABC.

Dat je trougao ΔABC. Konstruisati pravu koja će biti okomita na stranicu BC i koja će dati trougao podjeliti na dva dijela jednakih površina.

Rj:

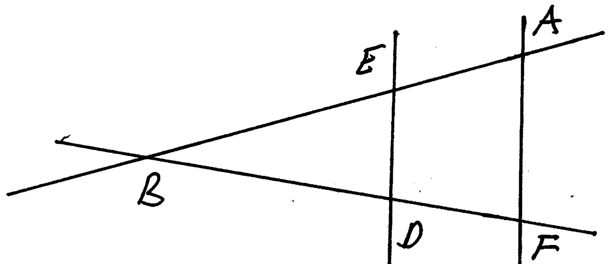
Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



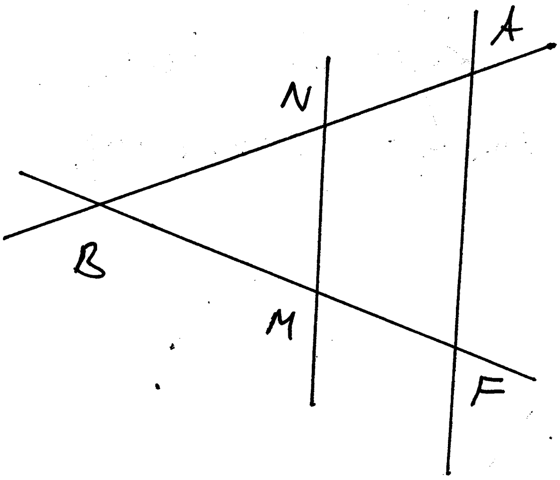
Neka je $p = p(E,D)$ tražena prava gdje su $E \in AB$, $D \in BC$. Dalje neka je M sredina od BC, $N \in AB$ t.d. $p(M,N) \perp BC$, AF visina na BC. Primjetimo da je

$$\frac{P_{\Delta ABM}}{P_{\Delta ABF}} = \frac{\frac{AF \cdot BM}{2}}{\frac{AF \cdot BF}{2}} = \frac{BM}{BF} \quad ; \quad \frac{P_{\Delta BED}}{P_{\Delta ABF}} = \frac{\frac{BD \cdot ED}{2}}{\frac{BF \cdot AF}{2}} = \frac{BD \cdot ED}{BF \cdot AF}$$



$$\overset{T_0 T_0}{\Longrightarrow} \quad \frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF} = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{BD \cdot EF}{BF \cdot AF} = \frac{BE^2}{BA^2}$$

Time smo dobili $\frac{P_{\Delta BED}}{P_{\Delta ABF}} = \frac{BE^2}{BA^2}$. Dalje



T.T. $\Rightarrow$ $\dfrac{BM}{BF} = \dfrac{BN}{BA}$

Time

$$\frac{BM}{BF} = \frac{BN}{BA} = \frac{BN \cdot BA}{BA^2}$$

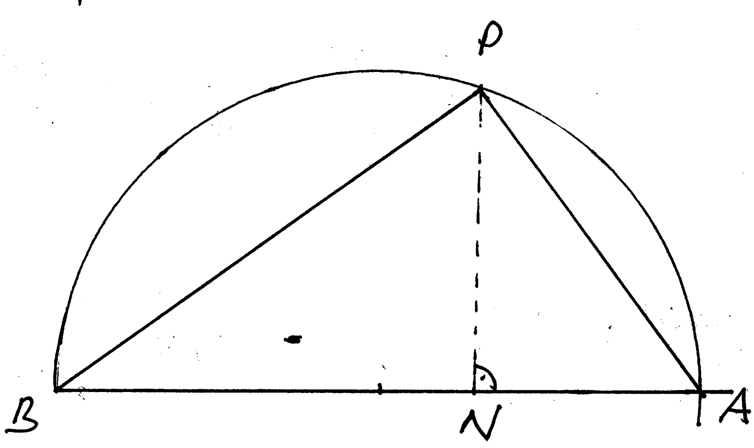
Sad primjetimo da imamo $\dfrac{P_{\Delta ABM}}{P_{\Delta ABF}} = \dfrac{BN \cdot BA}{BA^2}$; $\dfrac{P_{\Delta BED}}{P_{\Delta ABF}} = \dfrac{BE^2}{BA^2}$

Kako je $P_{\Delta ABM} = P_{\Delta BED} = \frac{1}{2} P_{\Delta ABC}$ dobili smo

$$BE^2 = BN \cdot BA.$$

Sad kako je dat trougao ΔABC, možemo odrediti tačku N a time i konstruisati duž BE^2. Poslije toga nije teško odrediti traženu pravu $p(E,D)$.

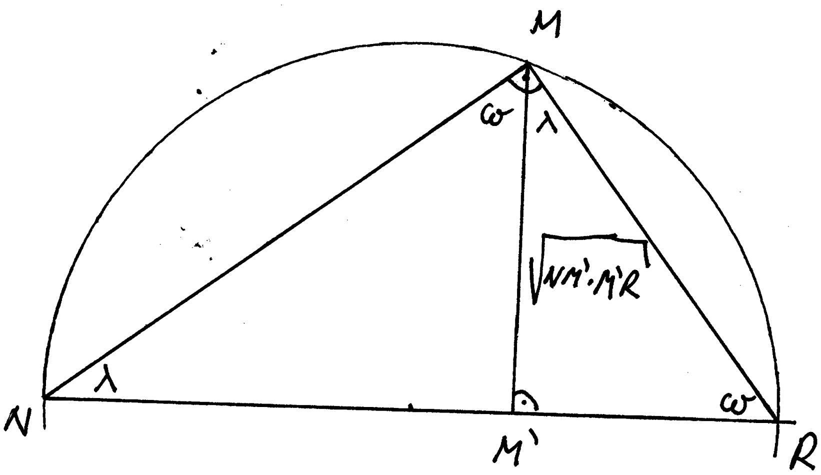
Napomena:



$$BP^2 = BN \cdot BA$$

(#) Neka je ΔMNR pravougli trougao sa pravim uglom u vrhu $\measuredangle RMN$, i neka je MM' visina na hipotenuzu NR. Dokazati da je $MN^2 = NM' \cdot NR$.

Rj.



Prvo pokažimo da je $MM' = \sqrt{NM' \cdot M'R}$.

Nije teško vidjeti da prema sličnosti UUU vrijedi

$$\Delta MNM' \sim \Delta RMM'$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MM'}{M'R} = \frac{NM'}{MM'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad MM'^2 = NM' \cdot M'R$$

$$MM' = \sqrt{NM' \cdot M'R}$$

Sad posmatrajmo pravougli trougao $\Delta MNM'$.

$$MN^2 = NM'^2 + MM'^2$$

$$MN^2 = NM'^2 + NM' \cdot M'R$$

$$MN^2 = NM' (NM' + M'R)$$

$$MN^2 = NM' \cdot NR$$

q.e.d.